

Марина Юрьевна Пермякова,  
Елена Алексеевна Коптева  
г. Шадринск

### О роли чертежа в решении стереометрической задачи

Статья посвящена вопросу обучения учащихся решению задач по стереометрии, в частности этапу выполнения чертежа. Авторы выделяют основные требования к чертежу геометрической задачи. Приводятся примеры ненаглядных и правильно выполненных наглядных чертежей. Даны комментарии по исправлению допущенных неточностей в построении. В статье обосновывается важность построения чертежа для правильного решения стереометрической задачи. В частности, обращается внимание на то, что в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике профильного уровня задачи по стереометрии вызывают наибольшие затруднения школьников, поэтому предлагаемые материалы являются достаточно актуальными на сегодняшний день.

**Ключевые слова:** стереометрическая задача, наглядный чертеж, двугранный угол, чертеж к стереометрической задаче.

Marina Yurievna Permyakova,  
Elena Alekseevna Kopteva  
Shadrinsk

### On the role of the drawing in solving the stereometric task

The article is devoted to the issue of teaching students to solve tasks in stereometry, in particular, the stage of drawing. The authors identify the main requirements for the drawing of a geometric task. Examples of non-visual and correctly executed visual drawings are given. Comments are given to correct the inaccuracies in the construction. The article substantiates the importance of constructing a drawing for the correct solution of a stereometric problem. In particular, attention is drawn to the fact that in the control and measuring materials of the Unified State Examination in mathematics of the profile level, tasks in stereometry cause the greatest difficulties for schoolchildren, therefore the proposed materials are quite relevant today.

**Keywords:** stereometric task, visual drawing, dihedral angle, drawing for a stereometric task.

Школьный курс геометрии представляет собой соединение двух содержательных линий: планиметрии, основы которой закладываются в основной школе, и стереометрии, изучение которой начинается в 10 классе. В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике профильного уровня предлагаются задания обеих содержательных линий. Однако, выполнение задач по стереометрии вызывает у учащихся наибольшее затруднение. Задание №13 (бывшее №14) по стереометрии школьниками характеризуется как очень сложное, поэтому не каждый участник экзамена возьмется за его выполнение. В критериях по оценке заданий профильного ЕГЭ по математике 2022 года правильное решение этого задания оценивается тремя баллами. Одним из условий выполнения этого задания является правильно и наглядно выполненный чертеж по условию задачи [4].

Стереометрический чертеж отличается от чертежа к планиметрической задаче, так как при решении задачи по планиметрии чертеж точно соответствует условию задачи. Например, если прямые параллельны (перпендикулярны), то они изображаются именно параллельными (перпендикулярными) прямыми (Рис.1).

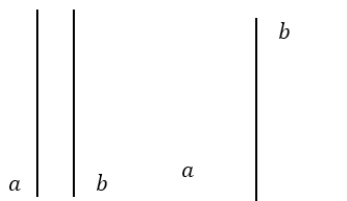


Рис. 1. Изображение параллельных и перпендикулярных прямых

При построении фигур на стереометрическом чертеже наблюдается абсолютно другая картина. Так как из всех свойств фигур сохраняются только параллельность прямых (отрезков) и отношение отрезков, лежащих на одной или на параллельных прямых. Например, при построении куба, перпендикулярность ребер на изображении сохраняется только для передней и задней граней, а для четырех других она не сохраняется в силу инвариантов параллельного проектирования (Рис.2) [1].

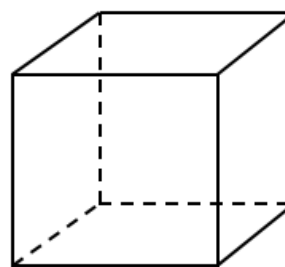


Рис. 2. Изображение куба

Чертеж при изображении фигур должен удовлетворять следующим требованиям: быть верным, быть наглядным и обязательно легко выполнимым.

К сожалению, в обязательной части базисного учебного плана на 2021-2022 г. не содержится дисциплины «Черчение». При изучении этого предмета школьники могли бы освоить азы выполнения чертежей, а на геометрии использовали бы эти знания при решении задач. В создавшейся ситуации учителю математики приходится решать и эту задачу, не смотря на постоянный не-

достаток времени для такой подготовки. Но правильно выполненный чертеж – это залог решения любой геометрической задачи!

Основная проблема построения чертежа в стереометрии заключается в том, что школьники привыкли работать с фигурами на плоскости, которые изображают на классной доске и в тетради. Данная проблема возникает в связи с недостатком развития пространственного мышления, а в частности, пространственного представления фигур, что могло быть решено на уроках черчения.

Построение чертежа при решении геометрической задачи является одним из важных этапов ее решения, поэтому учителю необходимо уделять этому особое внимание. Для понимания правильного выполнения построений необходимо рассматривать с учащимися примеры наглядных и ненаглядных чертежей основных пространственных фигур. Рассмотрим примеры некоторых ошибок в изображении фигур в пространстве и варианты того, как их избежать.

#### 1. Изображение куба.

Например, на рисунке 3 изображение куба является ненаглядным, так как его главная диагональ и боковые ребра совпадают (оказались на одной линии). А на рисунке 4 изображение куба правильное и наглядное [2].

Для большей наглядности видимые линии чертежа изображают сплошными, а невидимые – штриховыми линиями.

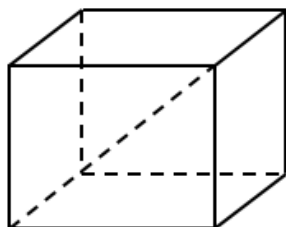


Рис. 3. Ненаглядное изображение куба

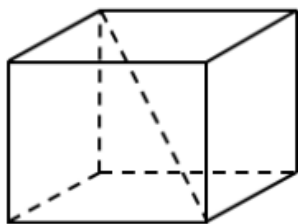
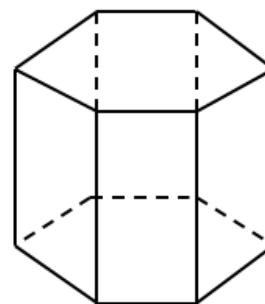


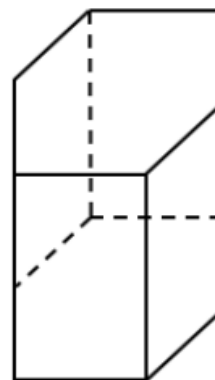
Рис. 4. Наглядное изображение куба

#### 2. Изображение шестиугольной призмы.

На рисунке 5 изображения призмы являются ненаглядными. На рисунке 5. а) нарушены правила параллельного проецирования. Ребра передней и задней грани совпали. На рис. 5. б) стороны основания и боковые ребра оказались на одной линии. На рисунке 6 изображение шестиугольной призмы правильное и наглядное [2].



а)



б)

Рис. 5. Ненаглядное изображение призмы

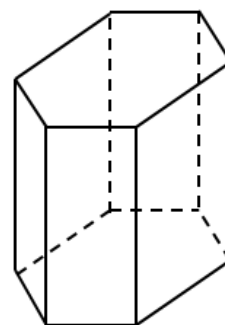


Рис. 6. Наглядное изображение призмы

#### 3. Изображение тетраэдра.

На рисунке 7 изображение тетраэдра является ненаглядным, так как изображение стало «плоским» и высота не видна, совпадает с боковым ребром. На рисунке 8 изображение тетраэдра правильное и наглядное [2].

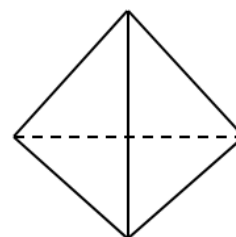


Рис. 7. Ненаглядное изображение тетраэдра

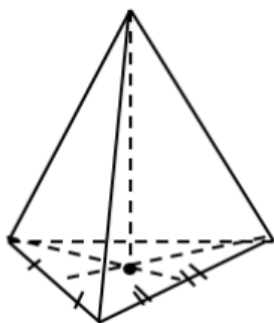


Рис. 8. Наглядное изображение тетраэдра

4. Изображение цилиндра.

На рисунке 9 изображение цилиндра является ненаглядным, аналогичная ошибка построения показана на рисунке 5. а), где нарушены правила параллельного проецирования. На рисунке 10 изображение цилиндра правильное и наглядное [2].

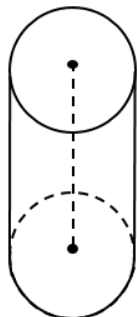


Рис. 9. Не наглядное изображение цилиндра

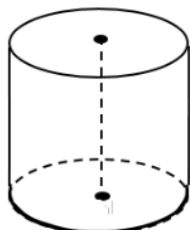
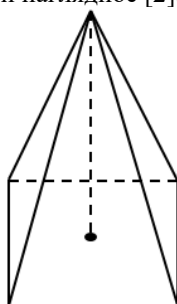


Рис. 10. Наглядное изображение цилиндра

5. Изображение правильной четырехугольной пирамиды.

На рисунке 12 изображения пирамиды являются ненаглядными. На рисунке 12. а) нарушены свойства параллельного проецирования. На рисунке 12. б) левая боковая грань не видна, вместо нее построена одна линия. На рисунке 13 изображение правильной четырехугольной пирамиды верное и наглядное [2].



а)



б)

Рис. 12. Ненаглядное изображение пирамиды

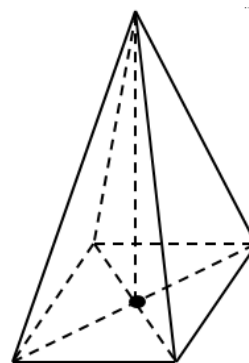


Рис. 13. Наглядное изображение пирамиды

Как правильно выполненный чертеж влияет на решение задачи можно увидеть на примере решения следующей задачи.

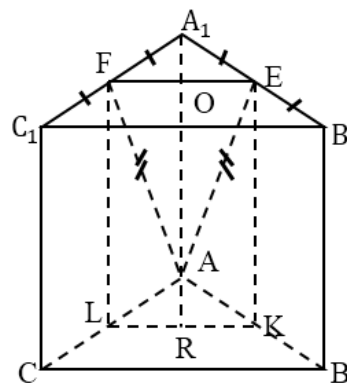


Рис. 14. Не наглядный чертеж

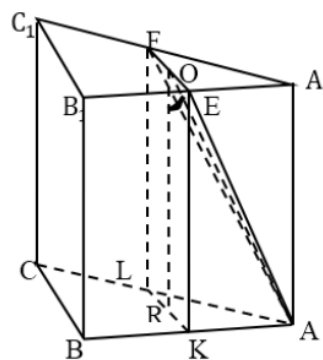


Рис. 15. Наглядный чертеж

Задача 1. Дана правильная треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ ,  $E$  – середина  $A_1B_1$ ,  $F$  – середина  $A_1C_1$ ,  $AB=AA_1$ . Построить угол  $\angle(AEF, BB_1C)$ .

Решение. Так как  $E$  – середина  $A_1B_1$ ,  $F$  – середина  $A_1C_1$ , то  $\triangle AEF$  равнобедренный.  $AO$  – медиана, тогда  $AO \perp FE$ . т.е.  $AO$  – высота  $\triangle AEF$ . По условию  $(FEK) \parallel (C_1B_1B)$ , проведем  $OR \parallel EK \parallel FL$  *значим*  $\Rightarrow \angle AOR$  – линейный угол данного двугранного угла, т.е.  $\angle AOR = \angle(AEF; BB_1C)$ .

На рисунке 14 изображен ненаглядный чертеж призмы, в этом случае невозможно определить

нужный угол, следовательно, возникнут трудности в правильном решении задачи. На рисунке 15 чертеж является правильным и наглядным, на котором необходимый угол хорошо визуализируется.

Правильность решения стереометрической задачи во многом зависит от изображения правильного и наглядного чертежа на плоскости листа бумаги. Для этого необходимо научить школьников правильно строить угол между прямой и плоскостью, двугранный угол и обосновывать положение высоты многогранника в зависимости от условия задачи. Это является объектом наших дальнейших исследований.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шехирева, Е.И. Роль чертежа при поиске решения стереометрической задачи / Е.И. Шехирева. – Текст : электронный // Концепт : науч.-метод. электрон. журн. – 2011. – 4 квартал. – С. 26–30. – URL: <http://e-koncept.ru/2011/11406.htm> (дата обращения: 10.04.22).
2. Как строить чертежи в задачах по стереометрии. – Текст : электронный // ЕГЭ-студия : [сайт]. – Москва, 2016-2020. – URL: <https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/kak-stroit-chertezhi-v-zadaniex-po-sterеometrii/> (дата обращения: 10.04.22).
3. Ларин, А.А. Официальный демонстрационный вариант ЕГЭ - 2022 : проект / А.А. Ларин. – Москва, 2022. – URL: [https://alexlarin.net/ege/2022/ma\\_demo\\_2022\\_p.pdf](https://alexlarin.net/ege/2022/ma_demo_2022_p.pdf). – Текст : электронный.

#### REFERENCES

1. Shehireva E.I. Rol' chertezha pri poiske reshenija stereometricheskoj zadachi [The role of the drawing in the search for a solution to a stereometric problem]. *Koncept: nauch.-metod. jelektron. zhurn. [Concept]*, 2011, 4 kvartal, pp. 26–30. URL: <http://e-koncept.ru/2011/11406.htm> (data obrashhenija: 10.04.22).
2. Kak stroit' chertezhi v zadachah po stereometrii [How to build drawings in stereometry tasks]. *EGJe-studija: [sajt] [USE-studio]*. Moscow, 2016-2020. URL: <https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/kak-stroit-chertezhi-v-zadaniex-po-sterеometrii/> (Accessed 10.04.22).
3. Larin A.A. Oficial'nyj demonstracionnyj variant EGJe - 2022: proekt [Official demo version of the Unified State Examination - 2022]. Moscow, 2022. URL: [https://alexlarin.net/ege/2022/ma\\_demo\\_2022\\_p.pdf](https://alexlarin.net/ege/2022/ma_demo_2022_p.pdf).

#### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ:

М.Ю. Пермякова, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования. ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: [permakova\\_marina@mail.ru](mailto:permakova_marina@mail.ru).

Е.А. Коптеева, студентка 3 курса, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: [elena.kopteeva2001@mail.ru](mailto:elena.kopteeva2001@mail.ru).

#### INFORMATION ABOUT THE AUTHOR:

M.Yu. Permyakova, Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics, Mathematics and Information Technology Education. Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: [permakova\\_marina@mail.ru](mailto:permakova_marina@mail.ru).

E.A. Kopteeva, 3<sup>rd</sup> year student, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: [elena.kopteeva2001@mail.ru](mailto:elena.kopteeva2001@mail.ru).