

Марина Юрьевна Пермякова
г. Шадринск

О некоторых особенностях подготовки к выполнению заданий ЕГЭ по математике темы «Производная функции»

Статья посвящена достаточно актуальной на сегодняшний день проблеме подготовки учащихся к ЕГЭ по математике. Автор выделяет типы задач по теме «Производная», которые могут быть представлены в контрольно-измерительных материалах экзамена по математике. Это задачи, в которых по заданной функции необходимо определить свойства производной, и задачи, в которых по заданной производной необходимо определить свойства функции. Для каждой из этих групп определены виды задач, которые включают задачи на касательную, монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения функции. Обращается внимание, что не все из выделенных видов задач можно найти на страницах школьных учебников алгебры, а для решения задач выделенных типов основным для учащихся является умение «читать» свойства функции в зависимости от способа её задания. В статье подчеркивается, что предъявление задач в виде дифференцированных тестовых заданий имеет огромный потенциал и может использоваться в качестве интенсивного тренинга в рамках подготовки учащихся к ЕГЭ по математике. Особое внимание автор обращает в этих задачах на графический способ задания функции или её производной.

Ключевые слова: производная, график производной, свойства функции, свойства производной, экстремумы, касательная.

Marina Yuryevna Permyakova
Shadrinsk

Some features of preparation of the Unified State Exam tasks in mathematics on the theme “Derivative of a function”

The article is devoted to the urgent problem of preparing students for the Unified State Exam in mathematics. The author identifies types of tasks on the topic “Derivative” that can be presented in test materials for a mathematics exam. These are tasks in which it is necessary to determine the properties of the derivative by a given function and tasks in which it is necessary to determine the properties of the function by a given derivative. For each of these groups, the types of problems are defined. They include tangent problems, monotonicity, extremes, the largest and smallest values of the function. Attention is drawn to the fact that not all of the selected types of tasks can be found on the pages of school textbooks of algebra and for solving problems of selected types, the main thing for students is the ability to “read” the properties of a function, depending on the way it is assigned. The article emphasizes that the presentation of tasks in the form of differentiated test tasks has a huge potential and can be used as an intensive training in the preparation of students for the Unified State Exam in mathematics, the author pays special attention in these tasks to the graphical way of setting a function or its derivative.

Keywords: derivative, derivative graph, function properties, derivative properties, extrema, tangent.

Функциональная линия – одна из основных тем школьного курса математики. Именно функция является основным средством описания любого реального процесса. В качестве модели реального процесса может выступать график функции, её аналитическое выражение или таблица значений [10]. Огромное прикладное значение функционального материала подчеркивается возможностями дифференциального исчисления.

В контрольно-измерительных материалах ЕГЭ по математике предлагаются задания по теме «Производная» [1]. В частности, в заданиях профильного уровня их два (№10 и 11), а среди базовых одно (№7). Все задания по этой теме можно разделить на две большие группы:

1) задачи, в которых по заданной функции необходимо определить свойства производной функции;

2) задачи, в которых по заданной производной необходимо определить свойства функции.

В условии задач обоих типов функции могут быть заданы как аналитически, так и графически. От этого будет зависеть собственно решение

поставленной задачи. Если функция задана аналитически, то свойства функции могут быть найдены элементарными средствами или с помощью производной. Элементарные средства в основном используются для решения теоретических задач, в частности, задач математического анализа при изучении высшей математики. В школьном курсе математики функции на монотонность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения исследуют с помощью средств дифференциального исчисления. Именно такие задачи включены в материалы итогового экзамена по математике. Знание таблицы производных, правил дифференциального исчисления и алгоритмов выполнения задачи на нахождение нужного свойства функции, являются залогом их успешного выполнения.

Решение задач на нахождение свойств функции по графику производной и свойств производной по графику функции представляют наибольший интерес. Несмотря на то, что такие задачи предлагаются в материалах ЕГЭ ежегодно, учащиеся продолжают делать ошибки при их выполнении [9]. Основной причиной этого является прежде всего не внимательное

прочтение графика данной в условии функции (задан график функции или график производной). В любом случае для решения такого рода задач учащимся необходимо уметь «читать» свойства

функции в зависимости от способа её задания. Обобщенный материал, необходимый для этого в случае задания функции её графиком, представлен в таблице 1 [3,7,8].

Таблица 1.

Чтение свойств функции $y = f(x)$

Номер п/п	Свойства функции	Значение этого свойства аналитически	Значение этого свойства графически
1.	Область определения	Переменная x в формуле $y = f(x)$ может принимать определенные значения	Область определения – это множеств абсцисс точек графика функции
2.	Область значений	Переменная y в формуле $y = f(x)$ может принимать определенные значения	Область значений функции – это множество ординат точек графика функции
3.	Нули функции	Корни уравнения $f(x)=0$	Это множество абсцисс точек пересечения графика функции с осью Ox
4.	Функция принимает значения: 1) больше a ; 2) меньше a ;	1) $f(x) > a$, при определенных значениях x ; 2) $f(x) < a$, при определенных значениях x	1) график функции расположен выше прямой $y = a$; 2) график функции расположен ниже прямой $y = a$
5.	Функция принимает значения, равные значениям функции $y = \varphi(x)$	$f(x) = \varphi(x)$ при определенных значениях x	График функции $y = \varphi(x)$ пересекает график функции $y = f(x)$
6.	Значения функции 1) больше значений функции $y = \varphi(x)$; 2) меньше значений функции $y = \varphi(x)$	1) $f(x) > \varphi(x)$ 2) $f(x) < \varphi(x)$ при определенных значениях x	1) график функции $y = f(x)$ расположен выше графика функции $y = \varphi(x)$; 2) график функции $y = f(x)$ расположен ниже графика функции $y = \varphi(x)$
7.	Функция $y = f(x)$ 1) возрастает на множестве X ; 2) убывает на множестве X	для любых $x_1, x_2 \in X$ 1) если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$; 2) если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$	1) с увеличением абсцисс точек на множестве X график функции «стремится» вверх; 2) с увеличением абсцисс точек на множестве X график функции «стремится» вниз

Немаловажным в рамках подготовки учащихся к выполнению заданий ЕГЭ по математике профильного уровня является умение решать задачи любого типа по теме «Производная». В рамках данной статьи выделим основные виды задач в зависимости от способа задания условия.

1. Задачи с аналитическим заданием функции $y = f(x)$.
2. Задачи, в которых задан график функции $y = f(x)$
3. Задачи, в которых задан график производной функции $y = f'(x)$.

К задачам первого типа относятся следующие задачи.

1. Задачи на составление уравнения касательной.
2. Задачи на нахождение координат точек касания.
3. Задачи на нахождение угла наклона касательной.
4. Задачи на исследование функции на монотонность.
5. Задачи на исследование функции на экстремумы.
6. Задачи на нахождение наибольшего и (или) наименьшего значений функции.

К задачам, в условии которых задан график функции $y = f(x)$, относятся следующие задачи темы «Производная».

1. Задачи, в которых по графику функции $y = f(x)$ и касательной к нему проведенной в точке с абсциссой x_0 нужно найти значение производной функции $y = f'(x)$ в точке касания.

2. Задачи, в которых по графику функции $y = f(x)$ надо определить в каких точках касательная к нему проходит горизонтально, образует с осью абсцисс острый угол, образует с осью абсцисс тупой угол.

3. Задачи, в которых по графику функции необходимо найти точки, где производная равна нулю, положительна, отрицательна или не существует.

Среди задач, в условии которых задан график производной функции, можно выделить следующие [5, 6].

1. Задачи, в которых по графику производной функции, нужно указать абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$: имеет наименьший (наибольший) угловой коэффициент; составляет с положительным направлением оси OX угол равный α ; имеет угловой коэффициент k .

2. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ требуется найти число касательных к графику функции $y = f(x)$ с заданным угловым коэффициентом k .

3. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ нужно определить угол наклона касательной в точке x_0 к графику функции $y = f(x)$

4. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ нужно найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$:

- а) в точке с абсциссой x_0 ;
- б) в точке $A(x_0; y_0)$.

5. Задачи, в которых по графику

производной функции $y = f'(x)$ нужно найти число касательных к графику функции $y = f(x)$, которые наклонены под углом α , к положительному направлению оси OX , если $\cos \alpha = a$.

6. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ нужно указать абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y_1 = ax + b$ или совпадает с ней.

7. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ нужно указать количество точек графика функции, $y = f(x)$ в которых проведенные касательные: имеют положительный угловой коэффициент; имеют отрицательный угловой коэффициент; наклонены под углом α к положительному направлению оси OX .

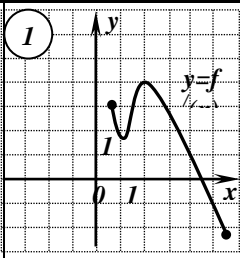
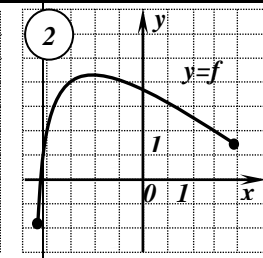
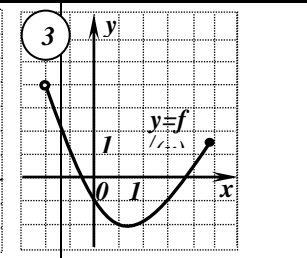
8. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ нужно найти тангенс угла наклона касательной к функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 .

9. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ необходимо определить промежутки монотонности функции или их количество.

10. Задачи, в которых по графику производной функции $y = f'(x)$ необходимо найти экстремумы функции.

Заметим, что не все из выделенных типов задач можно найти в школьных учебниках алгебры. Однако, любая из них может оказаться среди заданий контрольно-измерительных материалов ЕГЭ по математике.

Выделенные типы задач лучше представить в виде дифференцированных тестовых заданий. Такая форма предъявления упражнений может иметь огромный обучающий потенциал и использоваться в качестве интенсивного тренинга в рамках подготовки учащихся к ЕГЭ по математике. Приведем примеры некоторых из них [1, 2, 4].

<p>№1. На рисунках 1-3 заданы графики производных функций $y = f'(x)$,</p>			
<p>Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если</p>	<p>$x_0 = 2, k = \dots$</p>	<p>$x_0 = -3, k = \dots$</p>	<p>$x_0 = 3, k = \dots$</p>

Укажите абсциссу точки касания x_0 , если угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в этой точке равен:	$k = 1 \quad x_0 = \dots$	$k = 2 \quad x_0 = \dots$	$k = 4 \quad x_0 = \dots$
--	---------------------------	---------------------------	---------------------------

<p>№ 2. На рисунках 1-3 заданы графики производных функций $y = f'(x)$. Решите тестовые задания, запишите ответы в соответствующих клетках таблицы.</p>			
1. Найдите количество касательных к графику функции $y = f(x)$, угловой коэффициент которых равен 2.			
2. Определите абсциссу точки, касательная в которой составляет с осью Ox угол в 45° .			
3. Укажите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ имеет наименьший угловой коэффициент.			

При выполнении такого рода заданий можно предлагать необходимую информацию в виде справочного материала или графических алгоритмов, которые будут сопровождены необходимым для решения теоретическим материалом. В любом случае учащимся необходимо знать как производная связана с поведением функции, и что немаловажно,

внимательно читать условие задачи. Такие задания могут использоваться на этапе изучения нового материала, а также для систематизации изученного материала по теме «Производная». Интенсивный тренинг разноуровневых заданий по всем типам выделенных задач позволит сформировать умение по решению данного класса математических задач.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Открытый банк заданий по математике : [web-сайт] / Федеральная служба по надзору в сфере образования. – URL: <http://mathege.ru/ot/ege> (дата обращения: 21.06.2023). – Текст : электронный.
2. Пермякова, М.Ю. Функции, их свойства и графики : учеб.-метод. пособие для учащихся 7-9 классов / М.Ю. Пермякова ; Шадр. гос. пед. ун-т. – Шадринск : ШГПУ, 2020. – 64 с. – Текст : непосредственный.
3. Актуальные проблемы естественных, математических, технических наук и их преподавания : сб. науч. тр. / под ред. В.А. Калитвина. – Липецк : Липецкий ГПУ, 2021. – 201 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/228572> (дата обращения: 21.06.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
4. Бобровская, А.В. Практикум. Функции и графики : учеб.-метод. пособие для учащихся 9-11 кл. / А.В. Бобровская, О.И. Чикунова. – Шадринск : Шадринский Дом Печати, 2017. – 60 с. – Текст : непосредственный.
5. Будак, Б.А. Математика: сборник задач по углублённому курсу : учеб.-метод. пособие / Б.А. Будак, Н.Д. Золотарева, Ю.А. Попов ; под ред. М.В. Федотова. – 5-е изд. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 329 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=595231> (дата обращения: 21.06.2023). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
6. Голышева, С.П. Математика. Подготовка к ЕГЭ : учеб. пособие / С.П. Голышева. – 2-е изд., перераб. – Иркутск : Иркутский ГАУ, 2018. – 104 с. – URL: <https://e.lanbook.com/book/133402> (дата обращения: 21.06.2023). – Режим доступа: для авториз. пользователей. – Текст : электронный.
7. Манвелов, С.Г. Эффективное применение монотонности функций, изучаемых в основной и средней школах : учеб.-метод. пособие / С.Г. Манвелов, Н.С. Манвелов. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2017. – 89 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481433> (дата обращения: 21.06.2023). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
8. Мордкович, А.Г. Функции в школьном курсе математики (концепция изучения, методические рекомендации) / А.Г. Мордкович. – Москва : Авангард, 1994. – 60 с. – Текст : непосредственный.

9. Подходова, Н.С. Методика обучения математике : учеб. пособие для вузов / Н.С. Подходова, Н.Л. Стефанова, В.И. Снегурова. – Санкт-Петербург : РГПУ, 2020. – 264 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=692381> (дата обращения: 21.06.2023). – Режим доступа: по подписке. – Текст : электронный.
10. Сатьянов, П.Г. Методика использования задач графического содержания в обучении началам математического анализа в школе : автореф. дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / П.Г. Сатьянов. – Ленинград, 1984. – 16 с.

REFERENCES

1. Otkrytyj bank zadanij po matematike: [web-sajt] [Open bank of tasks in mathematics]. URL: <http://mathege.ru/or/ege> (Accessed 21.06.2023).
2. Permjakova M.Ju. Funkcii, ih svojstva i grafiki: ucheb.-metod. posobie dlja uchashhihsja 7-9 klassov [Functions, their properties and graphs]. Shadrinsk: ShGPU, 2020. 64 p.
3. Kalitvina V.A. (ed.) Aktual'nye problemy estestvennyh, matematicheskikh, tehniceskikh nauk i ih prepodavaniya: sb. nauch. tr. [Urgent problems of natural, mathematical, technical sciences and their teaching]. Lipeck: Lipeckij GPU, 2021. 201 p. URL: <https://e.lanbook.com/book/228572> (Accessed 21.06.2023).
4. Bobrovskaja A.V., Chikunova O.I. Praktikum. Funkcii i grafiki: ucheb.-metod. posobie dlja uchashhihsja 9-11 kl. [Functions and schedules]. Shadrinsk: Shadrinskij Dom Pechati, 2017. 60 p.
5. Budak B.A., Zolotareva N.D., Popov Ju.A. Matematika: sbornik zadach po uglubljonnomu kursu: ucheb.-metod. posobie [Mathematics]. In M.V. Fedotova (ed.). Moscow: Laboratorija znaniy, 2020. 329 p. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=595231> (Accessed 21.06.2023).
6. Golyшева S.P. Matematika. Podgotovka k EGJe : ucheb. posobie [Preparation for the Unified State Exam]. Irkutsk: Irkutskij GAU, 2018. 104 p. URL: <https://e.lanbook.com/book/133402> (Accessed 21.06.2023).
7. Manvelov S.G., Manvelov N.S. Jefferktivnoe primenenie monotonnosti funkcij, izuchaemyh v osnovnoj i srednej shkolah: ucheb.-metod. posobie [Effective application of monotony of functions studied in primary and secondary schools]. Moscow; Berlin: Direkt-Media, 2017. 89 p. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=481433> (Accessed 21.06.2023).
8. Mordkovich A.G. Funkcii v shkol'nom kurse matematiki (konceptija izuchenija, metodicheskie rekomendacii) [Functions in the school mathematics course (study concept, methodological recommendations)]. Moscow: Avangard, 1994. 60 p.
9. Podhodova N.S., Stefanova N.L., Snegurova V.I. Metodika obuchenija matematike: ucheb. posobie dlja vuzov [Methods of teaching mathematics]. Sankt-Peterburg: RGPU, 2020. 264 p. URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=692381> (Accessed 21.06.2023).
10. Sat'janov P.G. Metodika ispol'zovanija zadach graficheskogo sodержanija v obuchenii nachalam matematicheskogo analiza v shkole. Avtoref. dis. kand. ped. nauk [Methods of using graphic content tasks in teaching the basics of mathematical analysis at school Ph. D. (Pedagogics) thesis]. Leningrad, 1984. 16 p.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ:

М.Ю. Пермякова, доцент кафедры физико-математического и информационно-технологического образования, ФГБОУ ВО «Шадринский государственный педагогический университет», г. Шадринск, Россия, e-mail: permakova_marina@mail.ru.

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR:

M.Y. Permyakova, Ph. D. in Pedagogical Sciences, Associate Professor, Department of Physics and Mathematics and Information Technology Education, Shadrinsk State Pedagogical University, Shadrinsk, Russia, e-mail: permakova_marina@mail.ru.